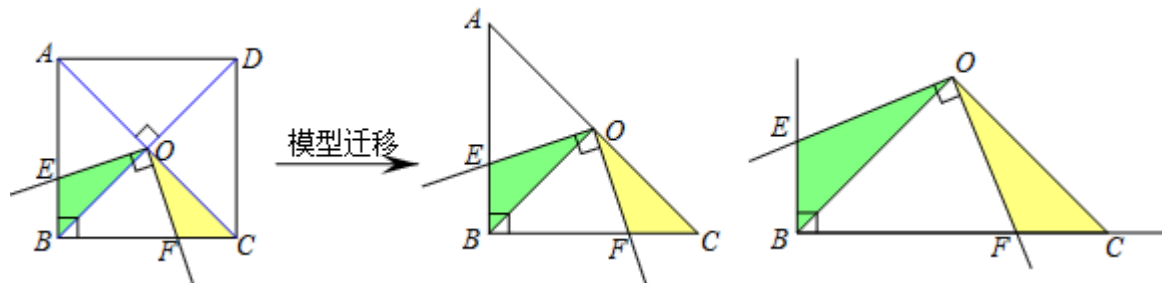


第2讲 旋转综合

一、 旋转之对角互补模型

锦囊妙计

如图，正方形 $ABCD$ ，对角线 AC 、 BD 交于点 O ， $\angle EOF = 90^\circ$ ，与正方形的两边分别交于点 E 、 F 。



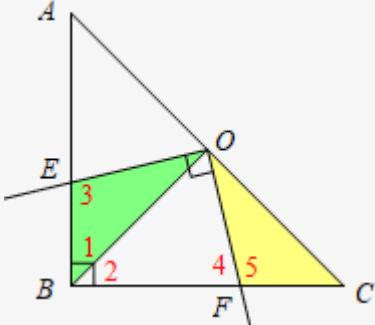
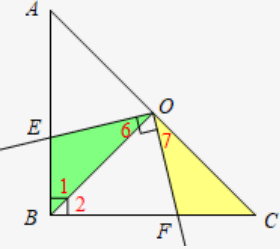
！ 结论：

① $\triangle BOE \cong \triangle COF$ ， $\triangle AOE \cong \triangle BOF$ 。

② $OE = OF$ ， $EF = \sqrt{2}OE$ 。

③ $S_{\text{四边形}OEBF} = \frac{1}{4}S_{\text{正方形}ABCD}$ 。

【备注】

【法一】	【法二】
	
$\because BO$平分$\angle ABC$, $\angle ABC=90^\circ$ $\therefore \angle 1=\angle 2=45^\circ$, $OB=OC$ $\therefore \angle 3+\angle 4=90^\circ$, $\angle 4+\angle 5=90^\circ$ $\therefore \angle 3=\angle 5$ 在$\triangle OBE$和$\triangle OCF$中 $\begin{cases} \angle 3=\angle 5, \angle 1=\angle 2, OB=OC \end{cases}$ $\therefore \triangle OBE \cong \triangle OCF (AAS)$ 易证$\triangle AOE \cong \triangle BOF$ $\therefore OE=OF$, $EF=2OE$ 四边形正方形$\therefore S_{\text{四边形}OEBF}=S_{\triangle OBC}=14S_{\text{正方形}ABCD}$	$\because BO$平分$\angle ABC$, $\angle ABC=90^\circ$ $\therefore \angle 1=\angle 2=45^\circ$, $OB=OC$ $\because \angle BOC=90^\circ$ $\therefore \angle 6=\angle 7$ 在$\triangle OBE$和$\triangle OCF$中 $\begin{cases} \angle 1=\angle 2, OB=OC, \angle 6=\angle 7 \end{cases}$ $\therefore \triangle OBE \cong \triangle OCF (ASA)$ 易证$\triangle AOE \cong \triangle BOF$ $\therefore OE=OF$, $EF=2OE$ 四边形正方形$\therefore S_{\text{四边形}OEBF}=S_{\triangle OBC}=14S_{\text{正方形}ABCD}$

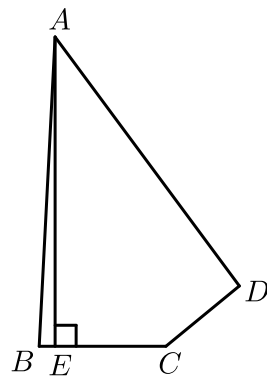
对角互补，顾名思义指四边的对角之和为 180° ，可以如基本图形展示的 $90^\circ+90^\circ$ ，也可以如 $60^\circ+120^\circ$ 等，

如上表列出两种办法，建议教师都给学生讲解一下，或者先让学生自己试着证明，再提问有没有其他证法呢

举个“栗”子

栗子1

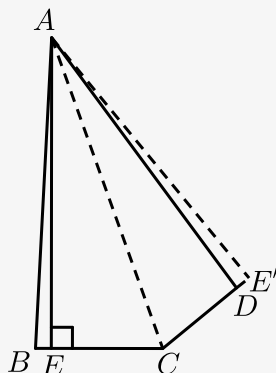
- 如图，在四边形 $ABCD$ 中， $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$ ， $AB = AD$ ， $AE \perp BC$ 于点 E ．若 $AE = 17$ ， $BC = 8$ ， $CD = 6$ ，则四边形 $ABCD$ 的面积为 _____ ．



【备注】由 $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$ ，分析出此图为对角互补模型；延长 CD 至点 E' ，二次全等将四边形的面积转化为 $2S_{\triangle AEC}$

【答案】 119

【解析】将 $\triangle ABE$ 绕点 A 逆时针旋转使 AB 与 AD 重合，得 $\triangle ADE'$ ，



$$\because \angle ABC + \angle ADC = 180^\circ,$$

$\therefore C, D, E'$ 三点共线.

即 $EA = E'A$, $AC = AC$ 得 $\text{Rt}\triangle AEC \cong \text{Rt}\triangle AE'C$.

$$\therefore EC = BC - BE = E'C = CD + DE',$$

$$8 - BE = 6 + BE, \text{ 得 } BE = 1.$$

$$\therefore EC = 7.$$

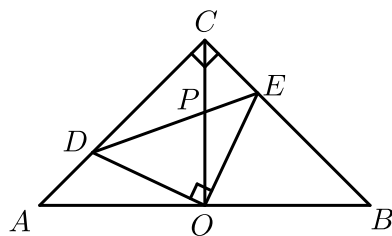
$$\therefore S_{\text{四边形}ABCD} = 2S_{\triangle AEC} = 2 \times \frac{7 \times 17}{2} = 119.$$

【标注】【知识点】对角互补模型；HL

栗子2

2. 如图，在等腰直角 $\triangle ACB$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， O 是斜边 AB 的中点，点 D 、 E 分别在直角边 AC 、 BC 上，且 $\angle DOE = 90^\circ$ ， DE 交 OC 于点 P 。则下列结论：（1）图形中全等的三角形只有两对；（2） $\triangle ABC$ 的

面积等于四边形 $CDOE$ 的面积2倍；(3) $CD + CE = \sqrt{2}OA$ ；(4) $AD^2 + BE^2 = DE^2$ 。其中正确的结论有()。



A. 1个

B. 2个

C. 3个

D. 4个

【备注】 典型对角互补模型；让学生将每个小问进行具体证明

【答案】 C

【解析】 结论(1)错误，理由如下：

图中全等的三角形有3对，分别为 $\triangle AOC \cong \triangle BOC$ ， $\triangle AOD \cong \triangle COE$ ， $\triangle COD \cong \triangle BOE$ ，

由等腰直角三角形的性质，可知 $OA = OC = OB$ ，易得 $\triangle AOC \cong \triangle BOC$ ，

$\therefore OC \perp AB$ ， $OD \perp OE$ ，

$\therefore \angle AOD = \angle COE$ ，

在 $\triangle AOD$ 与 $\triangle COE$ 中，

$$\begin{cases} \angle OAD = \angle OCE = 45^\circ \\ OA = OC \\ \angle AOD = \angle COE \end{cases},$$

$\therefore \triangle AOD \cong \triangle COE$ (ASA)，

同理可证： $\triangle COD \cong \triangle BOE$ ，

结论(2)正确，理由如下：

$\therefore \triangle AOD \cong \triangle COE$ ，

$\therefore S_{\triangle AOD} = S_{\triangle COE}$ ，

$\therefore S_{\text{四边形}CDOE} = S_{\triangle COD} + S_{\triangle COE} = S_{\triangle COD} + S_{\triangle AOD} = S_{\triangle AOC}$

$$= \frac{1}{2} S_{\triangle ABC},$$

即 $\triangle ABC$ 的面积等于四边形 $CDOE$ 的面积2倍。

结论(3)正确，理由如下：

$\therefore \triangle AOD \cong \triangle COE$ ，

$\therefore CE = AD$ ，

$\therefore CD + CE = CD + AD = AC = \sqrt{2}OA$ ，

结论(4)正确，理由如下：

$\therefore \triangle AOD \cong \triangle COE$ ，

$\therefore AD = CE$ ，

$$\therefore \triangle COD \cong \triangle BOE,$$

$$\therefore BE = CD,$$

在Rt $\triangle CDE$ 中, 由勾股定理得: $CD^2 + CE^2 = DE^2$,

$$\therefore AD^2 + BE^2 = DE^2,$$

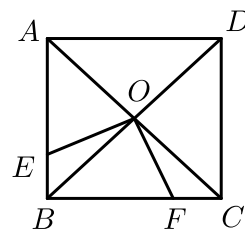
综上所述, 正确的结论有3个,

故选: C.

【标注】【知识点】对角互补模型

栗子3

3. 如图, 正方形 $ABCD$ 中, O 是对角线 AC 、 BD 的交点, 当 E 、 F 分别在 AB 、 BC 上运动时, 始终保持 $OE \perp OF$, 正方形的边长为5.



- (1) 求证: $\triangle OEB \cong \triangle OFC$.
- (2) 四边形 $OEBF$ 面积是否不变, 若不变, 请求出该四边形的面积, 若变化, 请说明理由.
- (3) 试确定 EF 的长度的取值范围.

【备注】(3) $\triangle OEF$ 为等腰直角三角形, $EF = \sqrt{2}OE$, 求 EF 的取值范围即求 OE 的最大值与最小值

【答案】(1) 证明见解析.

$$(2) \text{ 不变, } S_{\text{四边形}OEBF} = \frac{25}{4}.$$

$$(3) \frac{5}{2}\sqrt{2} \leq EF \leq 5.$$

【解析】(1) 在正方形 $ABCD$ 中, AC 、 BD 为对角线,

$$\angle ABO = \angle FCO = 45^\circ, \angle BOC = 90^\circ,$$

$$\therefore OE \perp OF,$$

$$\therefore \angle EOF = \angle EOB + \angle BOF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BOC = \angle FOC + \angle BOF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EOB = \angle FOC,$$

在 $\triangle EOB$ 和 $\triangle FOC$ 中,

$$\begin{cases} \angle ABO = \angle FCO \\ OB = OC \\ \angle EOB = \angle FOC \end{cases},$$

$$\therefore \triangle EOB \cong \triangle FOC (\text{ASA}) .$$

$$(2) \because S_{\text{四边形}OEBF} = S_{\triangle BOE} + S_{\triangle BOF} .$$

$$\text{由}(1)\text{知} S_{\triangle BOE} = S_{\triangle FOC} ,$$

$$\therefore S_{\text{四边形}OEBF} = S_{\triangle FOC} + S_{\triangle BOF} = S_{\triangle BOC} ,$$

$$\because BC = 5 , \therefore OB = OC = \frac{5\sqrt{2}}{2} ,$$

$$\therefore S_{\text{四边形}OEBF} = S_{\triangle BOC}$$

$$= \frac{1}{2} \times OB \cdot OC$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{5\sqrt{2}}{2} \times \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{25}{4} .$$

(3) 依题意, 当 $OE \perp AB$, $OF \perp BC$, EF 有最小值,

在正方形 $ABCD$ 中, 此时 E, F 分别为 AB, BC 中点,

$$\therefore EF = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} \times \sqrt{5^2 + 5^2} = \frac{5}{2} \sqrt{2} ,$$

当 E 运动到 B 点, F 运动到 C 点, EF 有最大值,

$$\text{此时} EF = BC = 5 ,$$

$$\therefore \text{综上} EF \text{ 的取值范围是 } \frac{5}{2} \sqrt{2} \leq EF \leq 5 .$$

【标注】【知识点】动点与特殊平行四边形问题

独步天下

4. 如图①, 在平面直角坐标系中, 等边 $\triangle ABC$ 的顶点 A, B 的坐标分别为 $(5, 0), (9, 0)$. 点 D 是 x 轴正半轴上一个动点, 连接 CD , 将 $\triangle ACD$ 绕点 C 逆时针旋转 60° 得到 $\triangle BCE$, 连接 DE .

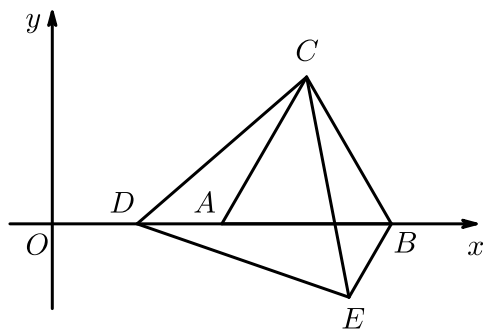


图 ①

- (1) 直接写出点 C 的坐标, 并判断 $\triangle CDE$ 的形状, 说明理由.
- (2) 如图②, 当点 D 在线段 AB 上运动时, $\triangle BDE$ 的周长是否存在最小值? 若存在, 求出 $\triangle BDE$ 的最小周长及此时点 D 的坐标; 若不存在, 说明理由.

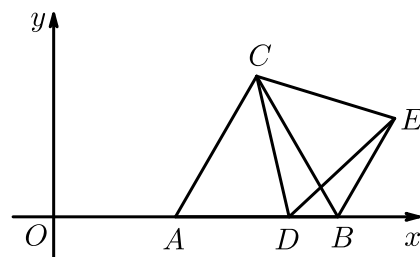


图 ②

(3) 当 $\triangle BDE$ 是直角三角形时, 求点 D 的坐标. (直接写出结果即可)

【备注】手拉手模型综合应用, (3) 中考查直角三角形存在性, 注意分类讨论

【答案】 (1) $C(7, 2\sqrt{3})$, $\triangle CDE$ 是等边三角形.

(2) $\triangle BDE$ 的最小周长 $= 2\sqrt{3} + 4$, 点 D 的坐标为 $(7, 0)$.

(3) 点 D 的坐标为 $(1, 0)$ 或 $(13, 0)$.

【解析】 (1) $C(7, 2\sqrt{3})$,

$\triangle CDE$ 是等边三角形,

$\because$ 由于将 $\triangle ACD$ 绕点 C 逆时针方向旋转 60° 得到 $\triangle BCE$,

$\therefore \angle DCE = 60^\circ$, $DC = EC$,

$\therefore \triangle CDE$ 是等边三角形.

(2) 存在. 旋转得, $BE = AD$.

$\therefore C_{\triangle BDE} = BE + BD + DE = AB + DE = 4 + DE$,

由 (I) 知: $\triangle CDE$ 是等边三角形,

$\therefore DE = CD$,

$\therefore C_{\triangle DBE} = CD + 4$,

由垂线段最短可知, 当 $CD \perp AB$ 于 D 时, $\triangle BDE$ 的周长最小,

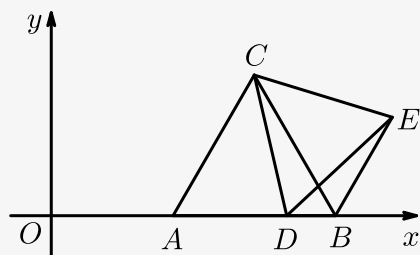
此时 $CD = 2\sqrt{3}$,

$\therefore \triangle BDE$ 的最小周长 $= 2\sqrt{3} + 4$, 点 D 的坐标为 $(7, 0)$.

(3) (1) D 在 AB 中间, 不成立, $5 < t < 9$,

$\angle ABC = 60^\circ$, $\angle CBE = 60^\circ$,

$\therefore \angle ABE = 120^\circ$, 不可能是直角.



(2) $t < 5$ 时 ,

$$\angle DEC = 60^\circ ,$$

$$\angle CEB = 30^\circ ,$$

$$\therefore \angle CDA = 30^\circ ,$$

作 $CM \perp x$ 轴于 M ,

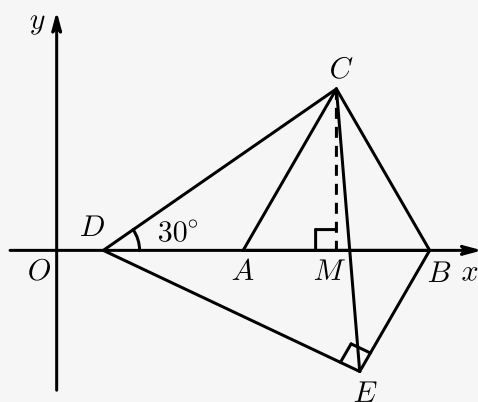
$$AB = 4 , \therefore AM = 2 ,$$

$$\therefore CM = 2\sqrt{3} ,$$

$$\therefore DM = 6 ,$$

$$AD = 6 - 2 = 4 ,$$

$$\therefore D(1, 0) .$$



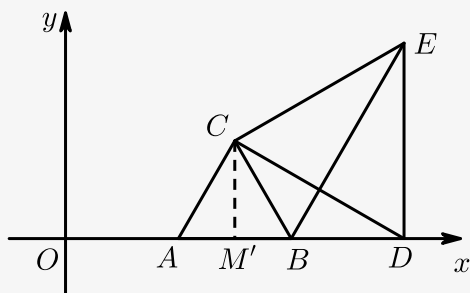
(3) $t > 9$ 时 ,

$$\angle BDE = 90^\circ ,$$

$$\angle CDE = 60^\circ ,$$

$$\therefore \angle CDB = 30^\circ ,$$

作 $CM' \perp AD$ 于 M' ,



$$CM' = 2\sqrt{3} , M'D = 6 ,$$

$$\therefore OD = 5 + 2 + 6 = 13 ,$$

$$\therefore D(13, 0) .$$

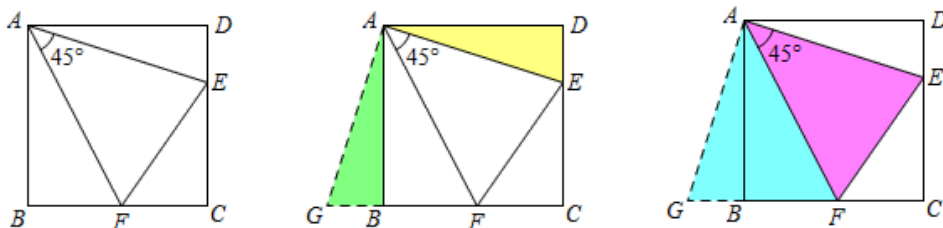
【标注】【知识点】旋转性质综合应用

二、旋转之角含半角模型

💡 锦囊妙计

💡 半角在倍角内

如图，正方形 $ABCD$ ，点 E 在边 CD 上，点 F 在边 BC 上， $\angle EOF = 45^\circ$ 。



辅助线：延长 BC 至点 G ，使 $BG = DE$ ，连接 AG 。（补短法）

！ 结论：

- ① 旋转全等： $\triangle ABG \cong \triangle ADE$ ，条件 **SAS**。
- ② 对称全等： $\triangle FAG \cong \triangle FAE$ ，条件 **SAS**。
- ③ $EF = BF + DE$ ，进而推出 $\triangle CEF$ 的周长等于 正方形周长的一半。
- ④ AF 平分 $\angle BFE$ ， AE 平分 $\angle DEF$ 。

【备注】【半角模型特征】：①共端点的等线段、

②共顶点的倍半角、

③半角关系： 90° 内含 45° ， 60° 内含 30° 。

【注意】辅助线描述不能够写旋转，要么写延长，要么写截取。

半角模型核心就是做旋转，如果不知道辅助线应该怎么画，还是回忆旋转问题的解题通法：

① 先找共顶点的等线段；

② 边怎么转，边所在三角形就怎么转。

因为是半角模型，还会有自己特殊的结论：

③ 先证明一次旋转全等（SAS）

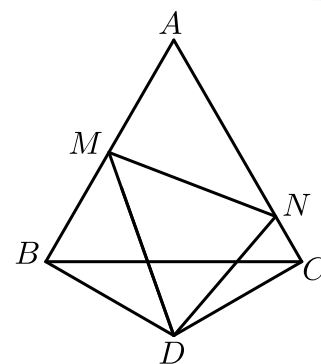
④ 再寻找对称全等（SAS）

注意，半角模型倒角相等比较难写过程，一定要带着学生把过程好好写一遍。

💡 举个“栗”子

|| 栗子4

5. 如图， $\triangle ABC$ 是边长为10cm的等边三角形， $\triangle BDC$ 是等腰三角形，且 $\angle BDC = 120^\circ$ 。以 D 为顶点作一个 60° 的角，使其两边分别交 AB 于点 M ，交 AC 于点 N ，连接 MN ，则 $\triangle AMN$ 的周长为 _____。



【备注】 $120^\circ - 60^\circ$ 的角含半角模型，利用半角模型的解题方法，二次全等得到 $MN = BM + NC$

【答案】20cm

【解析】 $\because \triangle BDC$ 是等腰三角形，且 $\angle BDC = 120^\circ$ ，

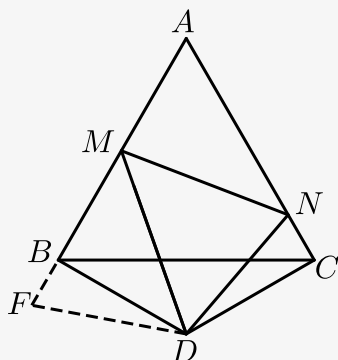
$$\therefore BD = CD, \angle BCD = \angle DBC = 30^\circ,$$

$\because \triangle ABC$ 是边长为10cm的等边三角形，

$$\therefore \angle ABC = \angle BAC = \angle BCA = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle DBA = \angle DCA = 90^\circ,$$

延长AB至F，使 $BF = CN$ ，连接DF，则 $\angle DBF = 90^\circ$ ，



在 $\triangle BDF$ 和 $\triangle CDN$ 中，

$$\begin{cases} BF = CN \\ \angle FBD = \angle NCD, \\ DB = DC \end{cases}$$

$\therefore \triangle BDF \cong \triangle CDN$ (SAS)，

$$\therefore \angle BDF = \angle CDN, DF = DN,$$

$$\therefore \angle MDN = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BDM + \angle CDN = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BDM + \angle BDF = 60^\circ, \text{ 即 } \angle MDF = 60^\circ.$$

在 $\triangle DMN$ 和 $\triangle DMF$ 中，

$$\begin{cases} DM = DM \\ \angle MDN = \angle MDF, \\ DN = DF \end{cases}$$

$\therefore \triangle DMN \cong \triangle DMF$ (SAS)，

$$\therefore MN = MF,$$

$\therefore \triangle AMN$ 的周长是：

$$AM + AN + MN = AM + AN + MF = AM + MB + BF + AN = AM + MB + AN + NC = AB + AC = 20\text{cm}$$

故答案为：20cm .

【标注】【知识点】等边三角形中的半角模型

栗子5

6. 回答下列问题

(1) 探究发现：如图1， $\triangle ABC$ 为等边三角形，点 D 为 AB 边上的一点， $\angle DCE = 30^\circ$ ， $\angle DCF = 60^\circ$ 且 $CF = CD$.

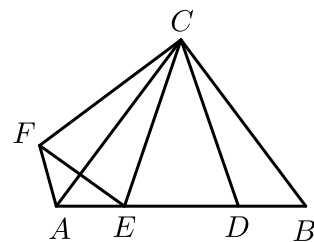


图 1

① 求 $\angle EAF$ 的度数 .

② DE 与 EF 相等吗?请说明理由

(2) 类比探究：如图2， $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形， $\angle ACB = 90^\circ$ ，点 D 为 AB 边上的一点， $\angle DCE = 45^\circ$ ， $CF = CD$ ， $CF \perp CD$ ，请直接写出下列结果， $\angle EAF$ 的度数 .

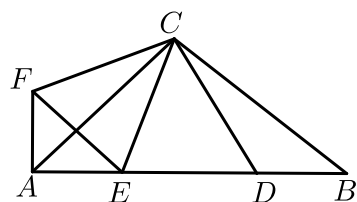


图 2

【备注】 (1) $60^\circ - 30^\circ$ 半角模型

(2) $90^\circ - 45^\circ$ 半角模型

【答案】 (1) ① 120° .

② 说明见解析 .

(2) 90° .

【解析】 (1) ① $\because \triangle ABC$ 是等边三角形，

$$\therefore AC = BC, \angle BAC = \angle B = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle DCF = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle ACF = \angle BCD,$$

在 $\triangle ACF$ 和 $\triangle BCD$ 中,

$$\begin{cases} AC = BC \\ \angle ACF = \angle BCD, \\ CF = CD \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ACF \cong \triangle BCD (\text{SAS})$$

$$\therefore \angle CAF = \angle B = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle EAF = \angle BAC + \angle CAF = 120^\circ.$$

② $DE = EF$; 理由如下:

$$\therefore \angle DCF = 60^\circ, \angle DCE = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle FCE = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle DCE = \angle FCE,$$

在 $\triangle DCE$ 和 $\triangle FCE$ 中,

$$\begin{cases} CD = CF \\ \angle DCE = \angle FCE, \\ CE = CE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle DCE \cong \triangle FCE (\text{SAS}),$$

$$\therefore DE = EF.$$

(2) $\therefore \triangle ABC$ 是等腰直角三角形, $\angle ACB = 90^\circ$,

$$\therefore AC = BC, \angle BAC = \angle B = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle DCF = 90^\circ$$

$$\therefore \angle ACF = \angle BCD,$$

在 $\triangle ACF$ 和 $\triangle BCD$ 中,

$$\begin{cases} AC = BC \\ \angle ACF = \angle BCD, \\ CF = CD \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ACF \cong \triangle BCD (\text{SAS}),$$

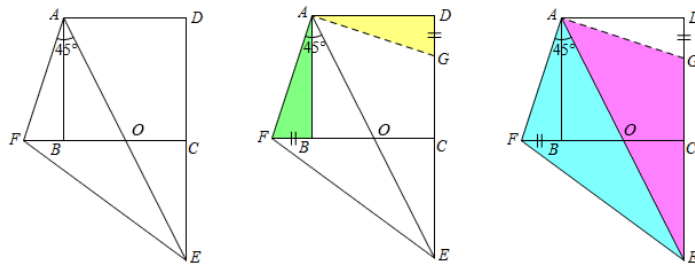
$$\therefore \angle CAF = \angle B = 45^\circ, AF = DB,$$

$$\therefore \angle EAF = \angle BAC + \angle CAF = 90^\circ.$$

【标注】【知识点】半角模型

半角在倍角外

如图, 正方形 $ABCD$, $\angle EOF = 45^\circ$, 旋转 $\angle EOF$ 与 DC 的延长线交于点 E , 与 CB 的延长线交于点 F



辅助线：在CD截取 $DG = BF$ ，连接AG。（截长法）

！结论：① 旋转全等： $\triangle ABF \cong \triangle ADG$ ，水平 SAS。

② 对称全等： $\triangle EAG \cong \triangle EAF$ ，水平 SAS。

③ $EF = DE - BF$ 。

④ AE平分 $\angle DEF$ 。

【备注】截取法构造辅助线，通过二次全等，得到 $EF = DE - BF$

举个“栗”子

栗子6

7. 已知：正方形ABCD中（图1）， $\angle MAN = 45^\circ$ ， $\angle MAN$ 绕点A顺时针旋转，它的两边分别交CB，DC（或它们的延长线）于点M，N。

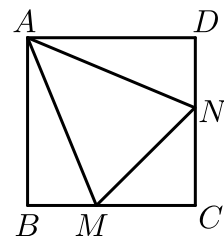


图1

（1）当 $\angle MAN$ 绕点A旋转到 $BM \neq DN$ 时（图2），线段BM，DN和MN之间有怎样的数量关系？写出猜想，并加以证明。

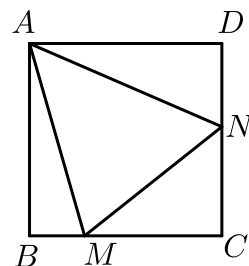


图2

（2）当 $\angle MAN$ 绕点A旋转到图3的位置时，线段BM，DN和MN之间又有怎样的数量关系？证明你的猜想。

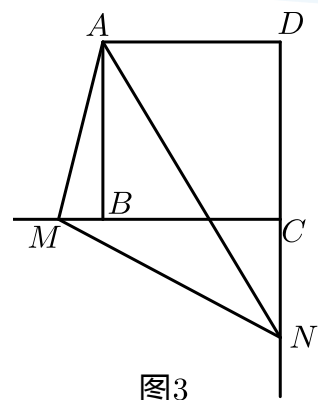


图3

(3) 若正方形的边长为4，当点N运动到DC边的中点处时，求BM的长．

【备注】 (3) 当N运动到CD的中点处时，
 $\therefore \angle BAC = 45^\circ$ ， $\angle MAN = 45^\circ$ ，
 $\therefore \angle MAN$ 一定在 $\angle BAD$ 内部

【答案】 (1) $BM + DN = MN$ ，证明见解析．

(2) $DN - BM = MN$ ，证明见解析．

(3) $BM = \frac{4}{3}$ ．

【解析】 (1) $BM + DN = MN$ ．

证明：如图2，把 $\triangle ADN$ 绕点A顺时针旋转 90° ，得到 $\triangle ABE$ ，则可证得E、B、M三点共线．

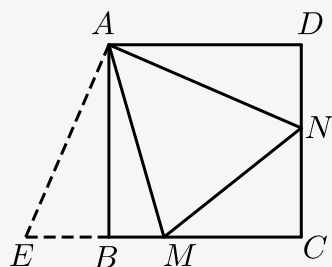


图2

$\therefore \angle EAM = 90^\circ - \angle NAM = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$ ，

又 $\therefore \angle NAM = 45^\circ$ ，

在 $\triangle AEM$ 与 $\triangle ANM$ 中，

$$\begin{cases} AE = AN \\ \angle EAM = \angle NAM \\ AM = AM \end{cases}$$

$\therefore \triangle AEM \cong \triangle ANM$ (SAS)，

$\therefore ME = MN$ ，

$\therefore ME = BE + BM = DN + BM$ ，

$\therefore DN + BM = MN$ ；

(2) $DN - BM = MN$ ．

证明：如图3，在线段 DN 上截取 $DQ = BM$ ，

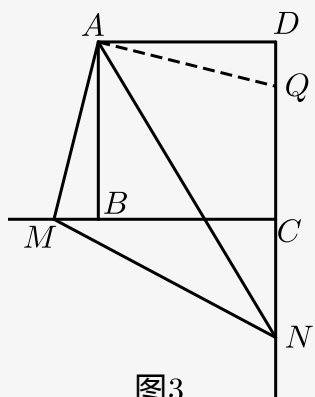


图3

在 $\triangle AMN$ 和 $\triangle AQN$ 中，

$$\begin{cases} AQ = AM \\ \angle QAN = \angle MAN, \\ AN = AN \end{cases}$$

$\therefore \triangle AMN \cong \triangle AQN$ (SAS) ,

$\therefore MN = QN$,

$\therefore DN - BM = MN$.

(3) 如图1 .

$\because$ 正方形的边长为4 ,

点 N 运动到 DC 边的中点处 ,

$\therefore CN = DN = 2$.

根据 (1) 可知 , $BM + DN = MN$,

设 $MN = x$, 则 $BM = x - 2$,

$\therefore CM = 4 - (x - 2) = 6 - x$.

在 $\text{Rt}\triangle CMN$ 中 ,

$$\therefore MN^2 = CM^2 + CN^2 ,$$

$$\therefore x^2 = (6 - x)^2 + 2^2 .$$

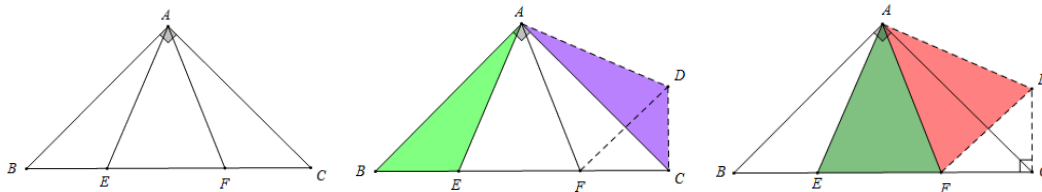
$$\text{解得 } x = \frac{10}{3} .$$

$$\therefore MB = \frac{10}{3} - 2 = \frac{4}{3} .$$

【标注】【知识点】半角模型

角含半角的平方关系

已知 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形 , $\angle EAF = 45^\circ$.



思路：过点A作 $AD \perp AE$ ，且 $AD = AE$ ，连接 CD 、 FD 。

依题可知 $\triangle ABC$ 、 $\triangle AED$ 都是 等腰直角三角形，

通过“SAS”可证 $\triangle ABE \cong \triangle ACD$ ， $BE = CD$ ， $BE \perp CD$ ，

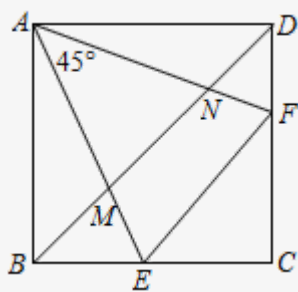
！结论：

① $\triangle AEF \cong \triangle ADF$ ， $EF = DF$ ，

② $BE^2 + CF^2 = EF^2$ 。

【备注】

已知正方形 $ABCD$ ， $\angle EAF = 45^\circ$ 。



【结论】

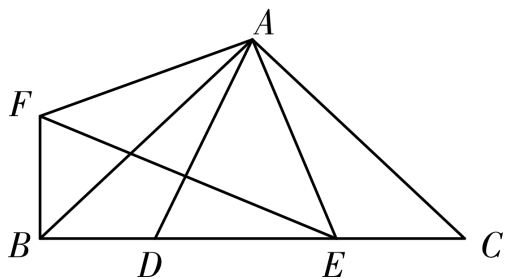
- ① $EF = BE + DF$ ；
- ② $MN^2 = BM^2 + DN^2$ ；
- ③ AE 平分 $\angle BEF$ ， AF 平分 $\angle DFE$ ；
- ④ 点 A 到 EF 的距离 $= AB$ 。

$\angle EAF$ 与正方形 $ABCD$ ； $\angle MAN$ 与正方形 $ABCD$ 分别为两组角含半角模型

🍌 举个“栗”子

栗子7

8. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， $\angle BAC = 90^\circ$ ， D 、 E 为 BC 上两点， $\angle DAE = 45^\circ$ ， F 为 $\triangle ABC$ 外一点，且 $FB \perp BC$ ， $FA \perp AE$ ，则下列结论：① $CE = BF$ ；② $BD^2 + CE^2 = DE^2$ ；③ $S_{\triangle ADE} = \frac{1}{4} AD \cdot EF$ ；④ $CE^2 + BE^2 = 2AE^2$ ，其中正确的是()



A. ①②③④

B. ①②④

C. ①③④

D. ②③

【备注】利用半角模型求解平方关系

④ $CE=BF$, 在 $Rt\triangle EBF$ 中 , $BE^2 + BF^2 = EF^2$;
 $\triangle FAE$ 为等腰直角三角形 , $EF^2 = 2AE^2$

【答案】 A

【解析】 解 : ① $\because \angle BAC = 90^\circ$, $FA \perp AE$, $\angle DAE = 45^\circ$,

$$\therefore \angle CAE = 90^\circ - \angle DAE - \angle BAD = 45^\circ - \angle BAD ,$$

$$\angle FAB = 90^\circ - \angle DAE - \angle BAD = 45^\circ - \angle BAD ,$$

$$\therefore \angle FAB = \angle EAC ,$$

$$\because AB = AC , \angle BAC = 90^\circ ,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle ACB = 45^\circ ,$$

$$\therefore FB \perp BC ,$$

$$\therefore \angle FBA = 45^\circ ,$$

$$\therefore \triangle AFB \cong \triangle AEC (ASA) ,$$

$$\therefore CE = BF , \text{ 故①正确} ,$$

$$\text{② : 由①中证明} \triangle AFB \cong \triangle AEC ,$$

$$\therefore AF = AE ,$$

$$\because \angle DAE = 45^\circ , FA \perp AE ,$$

$$\therefore \angle FAD = \angle DAE = 45^\circ ,$$

$$\therefore \triangle AFD \cong \triangle AED ,$$

连接 FD ,

$$\therefore FB = CE ,$$

$$\therefore FB^2 + BD^2 = FD^2 = DE^2 , \text{ 故②正确} ,$$

$$\text{③ : 如图 , 设} AD \text{ 与} EF \text{ 的交点为} G ,$$

$$\therefore \angle FAD = \angle EAD = 45^\circ , AF = AE ,$$

$$\therefore AD \perp EF , ,$$

$$\therefore S_{\triangle ADE} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot EG = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot \frac{1}{2} EF = \frac{1}{4} \cdot AD \cdot EF ,$$

故③正确 ,

$$\text{④ : } \because FB^2 + BE^2 = EF^2 , CE = BF ,$$

$$\therefore CE^2 + BE^2 = EF^2 ,$$

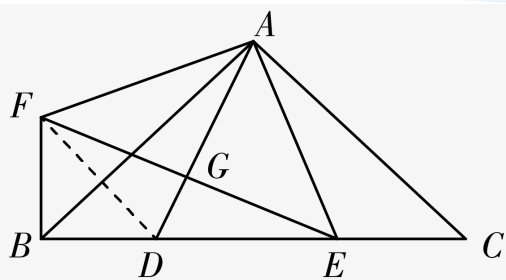
$$\text{在} Rt\triangle AEF \text{ 中} , AF = AE ,$$

$$AF^2 + AE^2 = EF^2 ,$$

$$\therefore EF^2 = 2AE^2 ,$$

$$\therefore CE^2 + BE^2 = 2AE^2 , \text{ 故④正确} .$$

故选 : A .



【标注】【知识点】等腰直角三角形中的半角模型